

高校生の部

平成26年度
算数・数学チャレンジ in やまがた

問題

1 ~ 5 各問 20 点, 計 100 点

平成 26 年 8 月 11 日

10 : 00 ~ 12 : 30

注 意

- 1 「開始」の合図があるまで、開いてはいけません。
- 2 問題は、1 ページから 5 ページまであり、問題用紙には、解答用紙が 5 枚はさんであります。
- 3 「開始」の合図があったら、まず、それぞれの解答用紙に受験番号を書きなさい。
- 4 答えは、すべて解答用紙に書きなさい。なお、特に指示がなければ、結果にいたる過程も書きなさい。
- 5 「終了」の合図で、すぐに鉛筆を置き、解答用紙 5 枚をまとめて裏返しにしなさい。

1 直方体の形をした資材があり，その3辺は，18 cm，20 cm，24 cmです。ある運送会社が，一度になるべく多くの資材を運搬したいと考えました。資材は，あとの図のように，それらの向きはすべて同じにして，すき間ができないように床に積み重ねて直方体をつくった上で，車両に積み込み，運搬することにします。

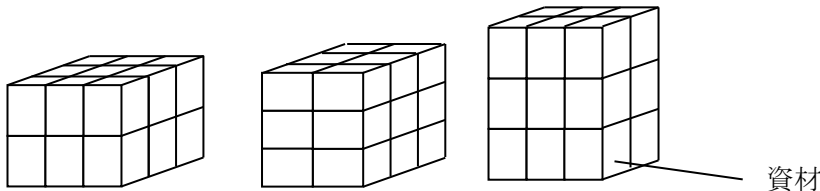
いま，この運送会社が運搬に使える車両の荷台スペースの都合等から，積み重ねてつくる直方体は，下の【制限】の①，②をともに受けるものとして，車両に資材を何個まで積み込むことができるか，答えなさい。

ただし，資材は，どの面を下にしても積み込むことができるものとします。

【制限】

- ① 積み重ねてつくる直方体の底面の縦と横の長さの和は，2.4m までである。
② 積み重ねてつくる直方体の高さは，3.4m までである。

例えば 18 個の資材をすき間なく積んだものは図のようなもの等がある。

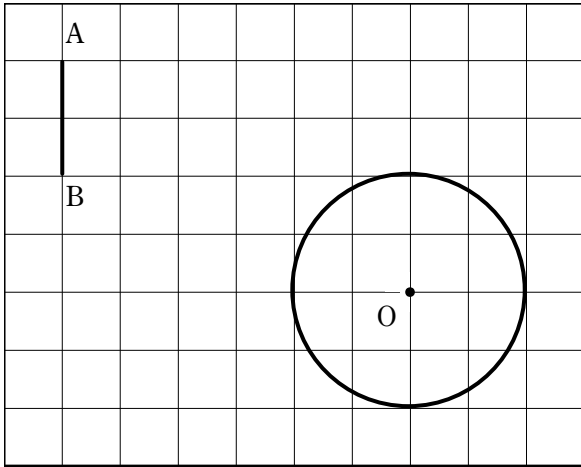


2 1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 個のランプがあり、すべて消灯しています。 n 個それぞれにスイッチがあり、スイッチを押すたびにランプは点灯と消灯が切り替わります。1 から n までの数字が 1 つずつ書かれた n 枚のカードが袋の中に入っています。

いま、この袋の中からカードを 1 枚取り出し、カードに書かれた数字の約数をすべて求め、それらの番号のランプのスイッチを押します。取り出したカードは元に戻さないことにし、この操作を袋が空になるまで繰り返します。このとき、次の問いに答えなさい。

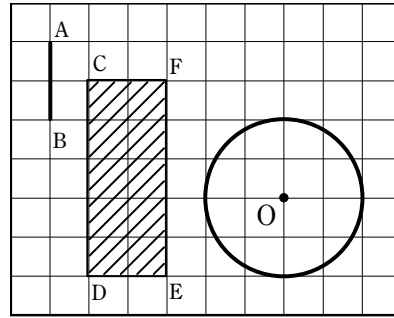
- (1) $n=10$ とします。カードをすべて取り出したとき、
 - ① 3 番のランプは点灯していますか、消灯していますか。
なお、解答用紙には答えのみを書きなさい。
 - ② 点灯しているランプの番号は何番ですか。すべて答えなさい。
なお、解答用紙には答えのみを書きなさい。
- (2) $n=200$ とします。カードをすべて取り出したとき、点灯しているランプは何個ですか。

- 3 下の図のように、点 O を中心とする半径 a の円 O と、円の外部に長さ a の線分 AB があります。2点 P, Q が次の場合のとき、そのそれぞれについて、線分 PQ の中点 M が動いてできる図形はどのようなになるか、その図形を(例)にならってかき、その面積を求めなさい。なお、解答用紙には答えのみを書きなさい。



(例)

M が四角形 $CDEF$ の周上またはその内部を動く場合は、下図のように斜線を引くか、または、塗りつぶして示しなさい。



- (1) 動点 P は円 O の周上及び内部を動き、点 Q は点 A と同じ位置にある場合。
- (2) 動点 P は円 O の周上及び内部を動き、動点 Q は線分 AB 上を動く場合。
- (3) 動点 P は円 O の周上を動き、動点 Q は線分 AB 上を動く場合。

4

表が出る確率と裏が出る確率がともに $\frac{1}{2}$ である硬貨を投げ、表か裏かを確認する実験を行います。この実験を繰り返し行い、表が連続して出たら実験を終了することにします。

このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 2回目, 3回目, 4回目, 5回目で実験が終了する場合はそれぞれ何通りあるか答えなさい。
なお, 解答用紙には答えのみを書きなさい。
- (2) 13回目で実験が終了する確率を求めなさい。

- 5 図1のように、底面の半径が $r(>0)$ 、高さが $h(>0)$ の円柱があり、2つの底面の円周上にそれぞれ点 A, B がある。この円柱の側面を、点 A から点 B まで、上から見て時計回りの斜め方向の最短経路にそって切り開いた平行四辺形のそれぞれの頂点を、図2のように、 A, B', B, A' とする。

図1

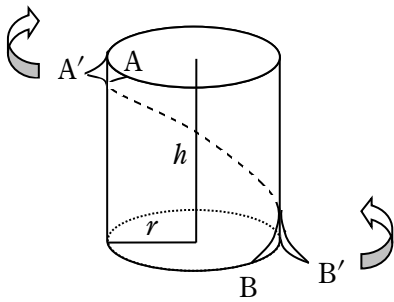
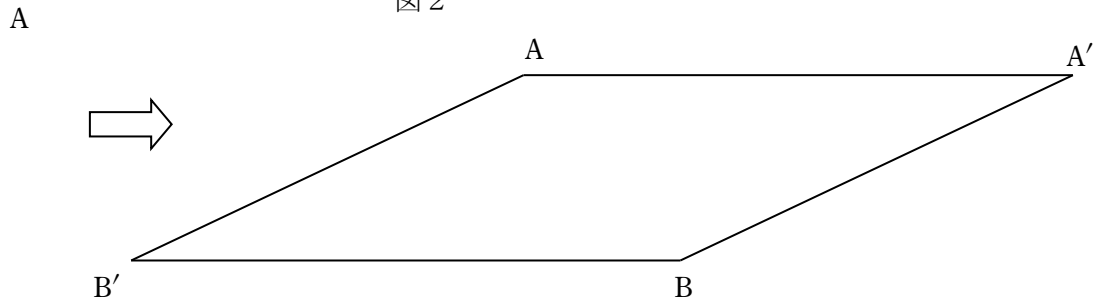
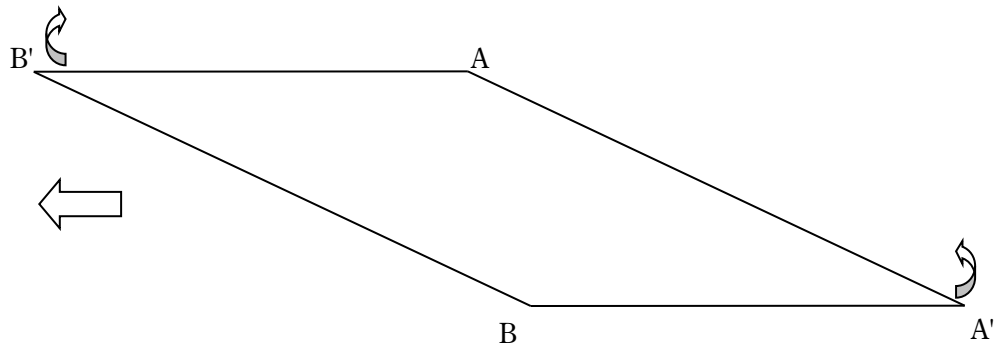
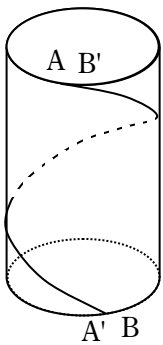


図2



いま、図2の平行四辺形 $AB'BA'$ において、点 A が点 B' に、点 A' が点 B に重なるように丸め、新たな円柱をつくる。



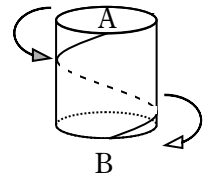
元の円柱の体積を V_1 、新たな円柱の体積を V_2 とするとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 元の円柱において側面を点 A から点 B まで切り開くときに、点 A から斜め方向にちょうど側面を1周するように、点 B をとると点 A のちょうど真下に点 B があります。このとき、

- ① $r=1, h=2$ とすると、 V_1, V_2 はいくらになるか求めなさい。

なお、解答用紙には答えのみを書きなさい。

- ② r, h がどのような値のときでも、 $V_1 < V_2$ となることを示しなさい。



- (2) $V_1 = V_2$ となるためには、元の円柱において側面を点 A から点 B まで切り開くときに、その長さがいくらになるように点 A, B をとればよいか、求めなさい。また、そのときの r と h が満たすべき条件を求めなさい。