5	図１のように，底面の半径が $r(>0)$，高さが $h(>0)$ の円柱があり，２つの底面の円周上にそれぞれ点 A，B がある。この円柱の側面を，点 A から点 B まで，上から見て時計回りの斜め方向の最短経路にそって切り開いた平行四辺形のそれぞれの頂点を，図２のように，A, B′, B, A′とする。

図１

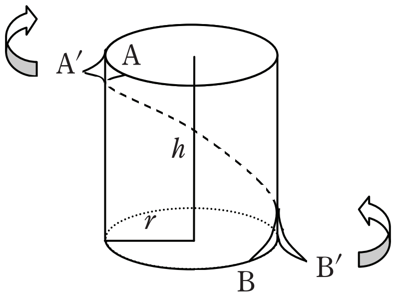
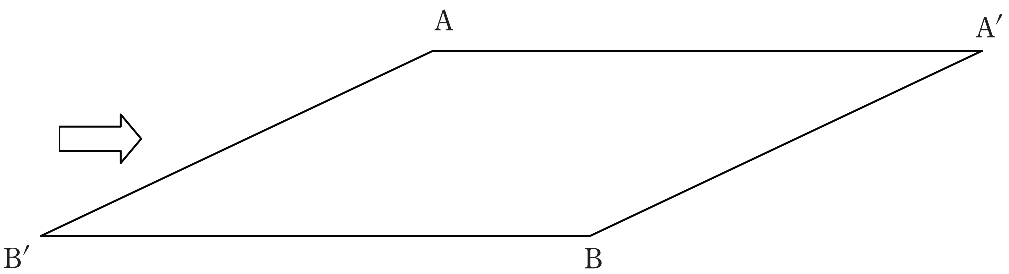
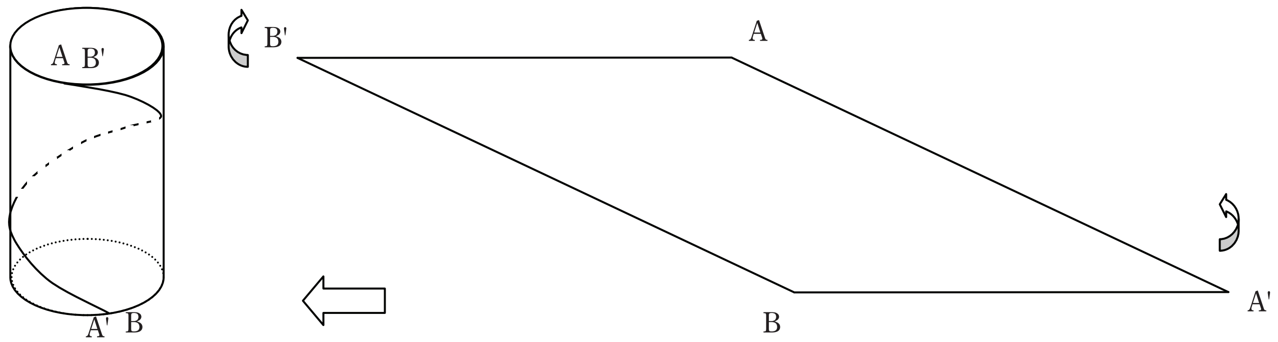


図２

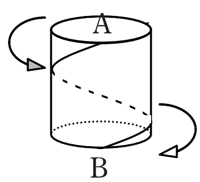


いま，図２の平行四辺形 AB′BA′ において，点 A が点 B′ に，点 A′ が点 B に重なるように丸め，新たな円柱をつくる。



元の円柱の体積を V_1，新たな円柱の体積を V_2 とするとき，次の問いに答えなさい。

(1)　元の円柱において側面を点 A から点 B まで切り開くときに，点 A から斜め方向にちょうど側面を１周するように，点 B をとると点 A のちょうど真下に点 B があります。このとき，



①　$r=1$，$h=2$ とすると，V_1，V_2 はいくらになるか求めなさい。
　なお，解答用紙には答えのみを書きなさい。

②　r，h がどのような値のときでも，$V_1 < V_2$ となることを示しなさい。

(2)　$V_1 = V_2$ となるためには，元の円柱において側面を点 A から点 B まで切り開くときに，その長さがいくらになるように点 A，B をとればよいか，求めなさい。また，そのときの，r と h が満たすべき条件を求めなさい。

［出題のねらい］

空間図形をそのままの形で平面上に表現することはできないため，空間図形の特徴を調べるために展開図をかいたり，平面上の表現から空間図形の性質を読み取ったりすることを，中学校数学で学習している。

この問題では，そのことを踏まえ，空間図形（円柱）の展開図である平面図形（平行四辺形）をかき，さらに，その平面図形から，別な空間図形の性質を読み取ることを通して，図形の性質の根底にある本質的なものを見抜く直観力や，その性質を論理的に考察し表現する能力を見ることとした。

［解答例］

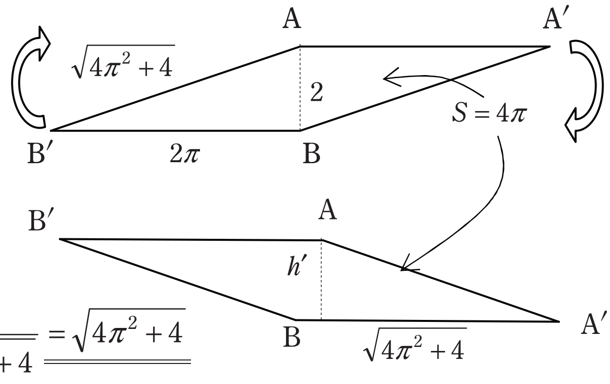
(1)　①　$V_1 = \pi \times 1^2 \times 2 = 2\pi$

新たな円柱の底面の半径 r'，高さ h' とすると，

$2\pi r' = \sqrt{4\pi^2+4}$ より，$r' = \dfrac{\sqrt{4\pi^2+4}}{2\pi}$

$\sqrt{4\pi^2+4} \cdot h' = 4\pi$ より，$h' = \dfrac{4\pi}{\sqrt{4\pi^2+4}}$

よって，$V_2 = \pi r'^2 h' = \pi \cdot \left(\dfrac{\sqrt{4\pi^2+4}}{2\pi}\right)^2 \cdot \dfrac{4\pi}{\sqrt{4\pi^2+4}} = \underline{\underline{\sqrt{4\pi^2+4}}}$



②　①と同様に V_1，V_2 を求めると，

$$V_2 = \frac{\sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2} \cdot rh}{2} = \sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2} \cdot \frac{rh}{2}$$

$$V_1 = \pi r^2 h = 2\pi r \cdot \frac{rh}{2}$$

ここで，$2\pi r$ と $\sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2}$ の大小を比べると $2\pi r < \sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2}$ となる。

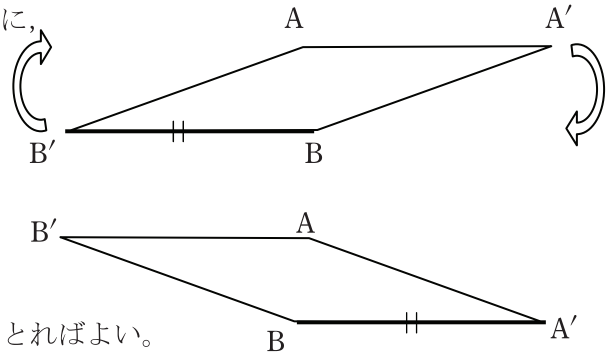
よって，r，h の値にかかわらず，$V_1 < V_2$ が成り立つ。

(2)　切り取る長さ $\mathrm{AB'} = \mathrm{A'B} = x$ とすると，(1)と同様に，

$$r' = \frac{x}{2\pi},\quad h' = \frac{2\pi rh}{x}$$

よって，$V_2 = \pi r'^2 h' = \pi \cdot \left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2 \cdot \dfrac{2\pi rh}{x} = \dfrac{rhx}{2}$

$V_1 = V_2$ より，$\pi r^2 h = \dfrac{rhx}{2}$　　$\therefore x = 2\pi r$



すなわち $\mathrm{AB'} = \mathrm{A'B} = 2\pi r$ となるように点 A，B をとればよい。

（四角形 AB′BA′ はひし形となり，$r' = r$，$h' = h$）

ここで，$x > h$ とならなければならないので，$h < 2\pi r$ である。

よって，切り口の長さは $\underline{\underline{2\pi r}}$，$r$ と h が満たすべき条件は，$\underline{\underline{h < 2\pi r}}$

［講評］

問題を解くには，新たな円柱の底面の半径と高さを，元の円柱の底面の半径と高さで表すことが必要となる。ポイントになるのは次の２点。

・側面を切り開く斜めの直線が，新たな円柱の底面の円周になることに気付く。

・側面を切り開いた図形（平行四辺形）の面積を２通りの方法で表せる。

また，平行四辺形を丸めて２種類の円柱をつくるとき，その体積が等しくなるのは，もとの平行四辺形がひし形のときである。このことに気付けば，正解に近いところまで解答できたのではないか。

これらを見抜くために必要なのは，図形に対する直観力や洞察力，つまり，図形の性質の根底にある本質的なものを見抜く資質・能力である。それらは，論理的な思考力に裏打ちされていることが必要であり，逆に，論理的な思考を導くはたらきをすることもある。高等学校における数学学習全般を通して，それらをしっかりと身に付けてもらいたい。