4	表が出る確率と裏が出る確率がともに$\dfrac{1}{2}$である硬貨を投げ，表か裏かを確認する実験を行います。この実験を繰り返し行い，表が連続して出たら実験を終了することにします。 このとき，次の問いに答えなさい。 (1)　2回目，3回目，4回目，5回目で実験が終了する場合はそれぞれ何通りあるか答えなさい。なお，解答用紙には答えのみを書きなさい。 (2)　13回目で実験が終了する確率を求めなさい。

［出題のねらい］

硬貨を投げる回数があらかじめ設定されている場合の確率は題材としてよく扱われるが，投げる回数が決まっていない問題を考えることによって，表裏の出かたを具体的に検証し，その場合の数の規則性に気付くことをねらいとした。この規則性を見いだすために確率ではなく場合の数を考えていくこと，１回目に表が出る場合と裏が出る場合の２つの場合に分けることがポイントである。

［解答例１］

(1)　表が出ることを○，裏が出ることを×で表す。

2回目で実験が終了する場合は　○○　の1通り

3回目で実験が終了する場合は　×○○　の1通り

4回目で実験が終了する場合は　××○○，○×○○　の2通り

5回目で実験が終了する場合は　×××○○，×○×○○，○××○○　の3通り

(2)　$n \geqq 4$のとき，n回目で実験が終了する場合の硬貨の出かたを　a_n　通りとする。

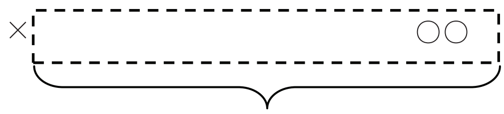
n回目で実験が終了するとき，次の２つの場合を考える。

①1回目裏が出るとき

2回目からn回目の$(n-1)$回で実験が終了する。

したがって，このときの硬貨の出かたは

a_{n-1}　通りとなる。



2回目以降の$(n-1)$回で実験が終了する

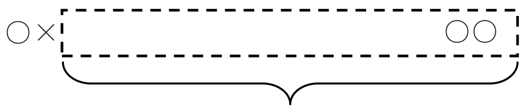
②1回目表が出るとき

2回目は裏が出て，

3回目からn回目の$(n-2)$回で実験が終了する。

したがって，このときの硬貨の出かたは

a_{n-2}　通りとなる。



3回目以降の$(n-2)$回で実験が終了する

①，②の場合から，$n \geqq 4$のとき

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$　が成り立つ。

ここで　$a_2 = 1$，$a_3 = 1$　であるから，a_2　以降の値を表で表すと以下のようになる。

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

よって，上の表より求める確率は

$$\frac{a_{13}}{2^{13}} = \frac{144}{2^{13}} = \frac{9}{2^9} = \frac{9}{512}$$

［解答例２］

(2)　13 回目で実験が終了するとき，11 回目は裏，12 回目は表，13 回目は表となるから
10 回目までに表が出る回数を考えると，表は 10 回中 5 回以下であればよい。
表が出ることを○，裏が出ることを×で表す。

①表が 0 回のとき，10 回すべて裏が出るから $\dfrac{1}{2^{10}}$

②表が 1 回のとき，9 個並べた×の両端か間に○が 1 つ並ぶとよいから $\dfrac{{}_{10}C_1}{2^{10}}$

③表が 2 回のとき，8 個並べた×の両端か間に○が 2 つ並ぶとよいから $\dfrac{{}_{9}C_2}{2^{10}}$

④表が 3 回のとき，7 個並べた×の両端か間に○が 3 つ並ぶとよいから $\dfrac{{}_{8}C_3}{2^{10}}$

⑤表が 4 回のとき，6 個並べた×の両端か間に○が 4 つ並ぶとよいから $\dfrac{{}_{7}C_4}{2^{10}}$

⑥表が 5 回のとき，5 個並べた×の両端か間に○が 5 つ並ぶとよいから $\dfrac{{}_{6}C_5}{2^{10}}$

したがって，$\dfrac{1}{2^{10}}+\dfrac{{}_{10}C_1}{2^{10}}+\dfrac{{}_{9}C_2}{2^{10}}+\dfrac{{}_{8}C_3}{2^{10}}+\dfrac{{}_{7}C_4}{2^{10}}+\dfrac{{}_{6}C_5}{2^{10}}=\dfrac{144}{2^{10}}$

この後，11 回目は裏，12 回目は表，13 回目は表となるから $\dfrac{144}{2^{10}}\times\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{9}{512}$

［講評］

(1)については，正解率は高かったが，間違えた受験者については数え間違いによるものと思われるので，もう一度確認して欲しい。(2)については，13 回目に実験が終了する場合は，11 回目が裏，12 回目が表，13 回目が表となることに気が付き，1～10 回目に出る表の回数によって分類し答案を作成している受験者が多かった。実験が終了する場合の回数がさらに増えたときや解答を一般化するときなどは解答例 1 に示した方法も有効である。是非このような問題を解くときに解答を一般化できるような解法に積極的に取り組んでいって欲しい。