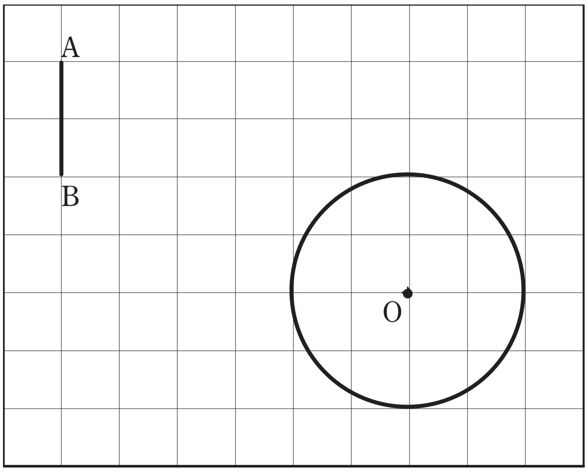
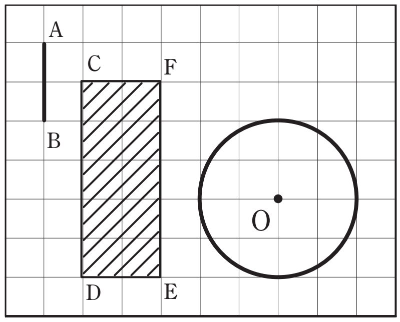
3　下の図のように，点Oを中心とする半径aの円Oと，円の外部に長さaの線分ABがあります。
２点P，Qが次の場合のとき，そのそれぞれについて，線分PQの中点Mが動いてできる図形はどのようになるか，その図形を（例）にならってかき，その面積を求めなさい。なお，解答用紙には答えのみを書きなさい。



（例）
Mが四角形CDEFの周上またはその内部を動く場合は，下図のように斜線を引くか，または，塗りつぶして示しなさい。



(1)　動点Pは円Oの周上及び内部を動き，点Qは点Aと同じ位置にある場合。

(2)　動点Pは円Oの周上及び内部を動き，動点Qは線分AB上を動く場合。

(3)　動点Pは円Oの周上を動き，動点Qは線分AB上を動く場合。

［出題のねらい］

ある条件のもとに２つのものが自由に動き回ると，その動き方や動くもの同士の関係を捉えることは大変難しい。そのような場合は，まず一方の動きを固定してもう一方を動かし，その後固定していたものを動かすという考え方をすると，全体の複雑な動きが簡単に把握できることが多い。この問題では，よく使われる線分と円の図形を用いて，この「動点固定法」の有用性やおもしろさを感じられるように出題した。点の動く図形を正しく描くためにどのようなアプローチをすればよいのか，図形の面積を工夫して求めることができるかどうかがポイントとなる。

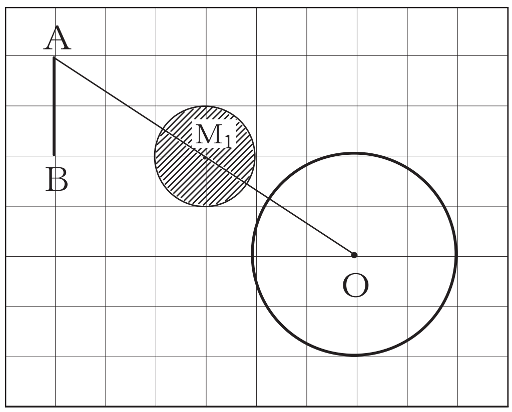
［解答例］

(1)　線分OAの中点をM_1とする。

Mは，M_1を中心とする半径$\dfrac{a}{2}$の円の周上およびその内部を動く。

よって，Mは右図の斜線部分を動く。ただし，境界線も含む。

求める面積は，$\pi\times\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{\pi}{4}a^2$



面積　$\dfrac{\pi}{4}a^2$

(2)　線分 OB の中点を M_2 とする。

AB // M_1M_2 となるから，$M_1M_2=\dfrac{a}{2}$ となる。

M は，右図の斜線部分を動く。ただし，境界線も含む。

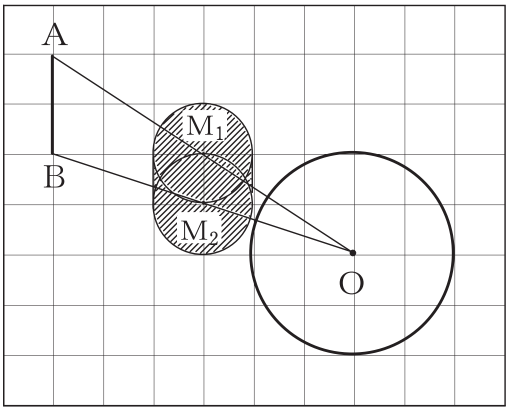
求める面積は，

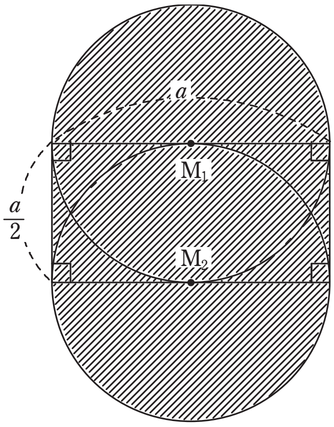
半径 $\dfrac{a}{2}$ の半円 2 個の面積に，辺の長さ $\dfrac{a}{2}$ と a の長方形の面積を足したものになる。

よって，

$$\left\{\pi\times\left(\frac{a}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}\right\}\times2+\frac{a}{2}\times a$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)a^2$$





面積　$\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\right)a^2$

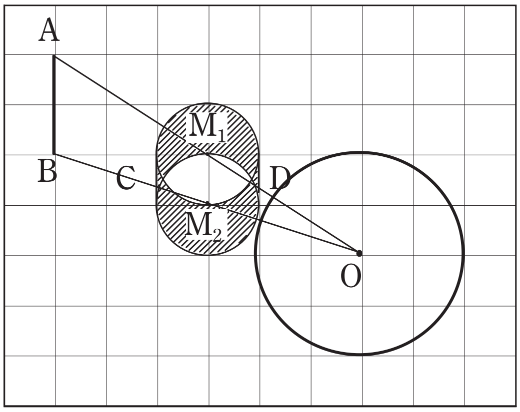
(3)　M_1 を中心とする半径 $\dfrac{a}{2}$ の円と，M_2 を中心とする半径 $\dfrac{a}{2}$ の円の交点を C，D とする。

M は，右図の斜線部分を動く。ただし，境界線も含む。

ここで，下図の左の塗りつぶされた部分の面積は，

$$2\times\pi\times\left(\frac{a}{2}\right)^2\times\left(\frac{120°}{360°}\right)-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{a}{4}\times\frac{1}{2}$$

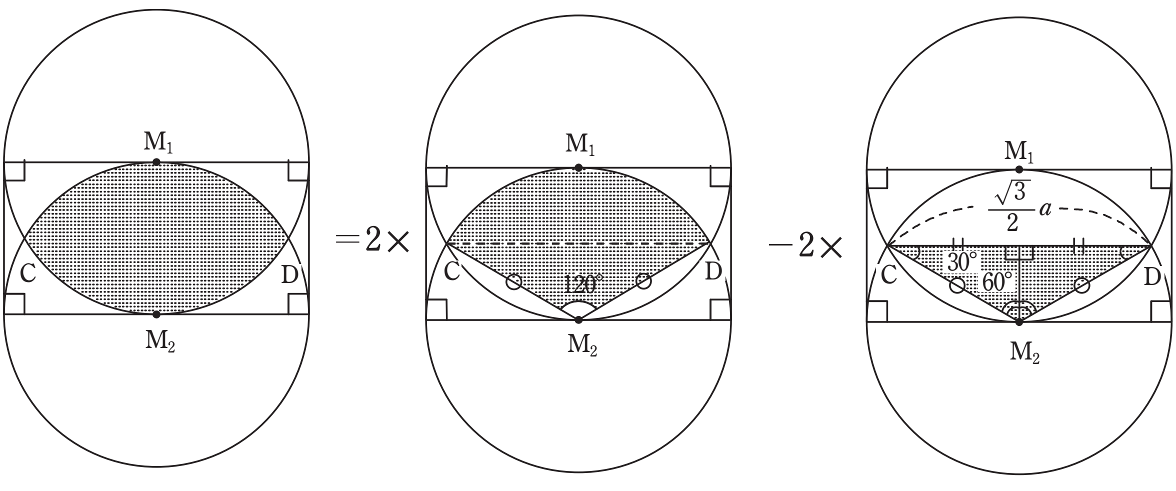
$$=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)a^2$$



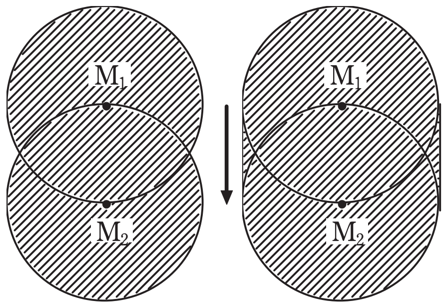
面積　$\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)a^2$

求める面積は，(2) で求めた面積から，上で求めた面積をひいたものになるから，

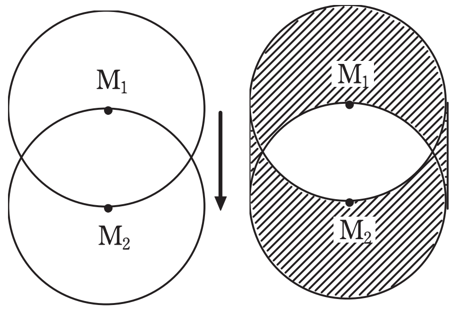
$$\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)a^2-\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)a^2=\left(\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)a^2$$



［講評］
(1)図を正確に書くことが出来た生徒は71%程度で，完答した生徒は58%程度であった。図形の問題では，具体的な実験を行うことにより，問題の本質，ヒント，解答の手がかりがみえてくることが多くある。この問題では，点Pを円Oの周上および内部の具体的な点をいくつかとり，中点Mの動きを捉えようとすれば，Mは，線分OAの中点M_1を中心とする半径$\frac{a}{2}$の円M_1の周上およびその内部を動くことがわかる。なお,「中点Mをとる」ことは「$\frac{1}{2}$の縮尺になる」ことだから，Mの面積は，線分ABと円Oの距離によらず$\frac{\pi}{4}a^2$になる。
(2)図を正確に書くことが出来た生徒は55%程度で，完答した生徒は42%程度であった。まず，点Qを点Bと同じ位置にある場合を考えると，Mは線分OBの中点M_2を中心とする半径$\frac{a}{2}$の円M_2の周上およびその内部を動く。次に，点Qを点Aから点Bまで移動させれば，円M_1は円M_2に平行移動する。このようにしてできた図形が求めるものとなる。(1)のヒントを使えたかどうかがポイントである。



(3)図をかくことが出来た生徒は 15%程度いたが，完答した生徒は1名だけであった。まず, 点Qを点Aと同じ位置にある場合は，Mは，線分OAの中点M_1を中心とする半径$\frac{a}{2}$の円M_1の周上を動き，点Qを点Bと同じ位置にある場合は，Mは線分OBの中点M_2を中心とする半径$\frac{a}{2}$の円M_2の周上を動く。次に，点Qを点Aから点Bまで移動させれば，円M_1は円M_2に平行に移動する。このようにしてできた図形が求めるものである。



(2)と同じ図形をかいた解答が多く見られた。このような誤答も，具体的に作図してみれば防ぐことができる間違いである。また，面積は，(2)の面積から空白の部分を引くといった工夫で容易に求められるが，計算しないで諦めている解答が多く見られ残念であった。
　この「動点固定法」の考え方は,「図形」の分野だけでなく，数学Ⅰの「2次関数の最大値・最小値」の分野でも使われることが多くある。次の2つの例題にチャレンジして，この機会に「動点固定法」の考え方をマスターしてみてほしい。

【例1】
$f(x,\ y)=x^2-2xy+2y^2+2y$ の最小値m_1を求めよ。

【解答】
まず，x，yのうちの一方の文字（ここではyとする）を定数と考えて（固定して）$f(x,\ y)$をxの2次式とみて平方完成する。
$f(x,\ y)=(x^2-2yx)+2y^2+2y=(x-y)^2+y^2+2y$ となる。
次に，残った(y^2+2y)のyを変数と考えて，再度平方完成すると，
$f(x,\ y)=(x-y)^2+(y+1)^2-1$
ここで，$(x-y)^2\geqq 0$，$(y+1)^2\geqq 0$ であるから，$f(x,\ y)\geqq 0+0-1=-1$

よって，$f(x, y)$は，$\begin{cases} x-y=0 \\ y+1=0 \end{cases}$ のとき最小となる。

ゆえに，$x=y=-1$ のとき，最小値 $m_1=-1$ となる。

【例 2】

$-1 \leqq x \leqq 2$，$0 \leqq y \leqq 1$ のとき，$f(x, y)=x^2-2xy+2y^2+2y$ の最小値 m_2を求めよ。

【解答】

まず，$y=l$（$0 \leqq l \leqq 1$）とおいて固定し，x のみを動かすことにする。

$f(x, l)=x^2-2xl+2l^2+2l=(x^2-2lx)+2l^2+2l=(x-l)^2+l^2+2l$ となる。

$0 \leqq l \leqq 1$ は，$-1 \leqq x \leqq 2$ に含まれているから，

$f(x, l)$ の最小値は，$x=l$ のとき，$l^2+2l=(l+1)^2-1$ となる。

次に l を $0 \leqq l \leqq 1$ のもとで動かすと，$l^2+2l=(l+1)^2-1$ は，$l=0$ のとき最小値 0 をとる。

ゆえに，$x=y=0$ のとき，最小値 $m_2=0$ となる。