

2 1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 個のランプがあり、すべて消灯しています。 n 個それぞれにスイッチがあり、スイッチを押すたびにランプは点灯と消灯が切り替わります。1 から n までの数字が 1 つずつ書かれた n 枚のカードが袋の中に入っています。

いま、この袋の中からカードを 1 枚取り出し、カードに書かれた数字の約数をすべて求め、それらの番号のランプのスイッチを押します。取り出したカードは元に戻さないことにし、この操作を袋が空になるまで繰り返します。このとき、次の問いに答えなさい。

(1) $n=10$ とします。カードをすべて取り出したとき、

① 3 番のランプは点灯していますか、消灯していますか。

なお、解答用紙には答えのみを書きなさい。

② 点灯しているランプの番号は何番ですか。すべて答えなさい。

なお、解答用紙には答えのみを書きなさい。

(2) $n=200$ とします。カードをすべて取り出したとき、点灯しているランプは何個ですか。

[出題のねらい]

自然数の倍数の個数を考える問題として出題した。ひとつひとつの操作はカードの番号の約数で行うのだが、最終の結果については、ランプの番号に着目し、その倍数が書かれたカードが何枚あるかを考えるとわかりやすい。このように複数の視点があるとき、どちらに着目するか考えてもらうことをねらいとした。

(1) では n が小さいので、全部書き並べて考えることができる。このように、いくつかで考えてみて、その後、一般にどうなるかを考える、という手法は様々な場面で有効である。(1)の結果をうまく法則化できるかが(2)を解くうえでのポイントである。

[解答例]

(1) ① 3 番のランプのスイッチを押すのは、9, 6, 3 のカードを取り出したときである。

よって、3 回スイッチを押すので、点灯、消灯、点灯となり、点灯している。

② 10, 9, 8, 7, 6 のランプはそのカードで 1 回ずつスイッチを押す。よって点灯。

5 のランプは 10, 5 のカードで合計 2 回スイッチを押す。よって消灯。

4 のランプは 8, 4 のカードで合計 2 回スイッチを押す。よって消灯。

3 のランプは①の通りで点灯。

2 のランプは 10, 8, 6, 4, 2 のカードで合計 5 回スイッチを押す。よって点灯。

1 のランプはすべてのカードで合計 10 回スイッチを押す。よって消灯。

以上より、点灯しているのは、2, 3, 6, 7, 8, 9, 10 番のランプである。

(2) 各番号のランプは 200 以下の正の倍数の個数の回数だけ点灯、消灯を繰り返す。

最終的に点灯しているのは、200 以下の正の倍数の個数が奇数個のものである。

k を 200 以下の正の整数として、

$200=2 \times 100$ より、 $101 \leq k \leq 200$ のとき、 k の倍数は 1 個

$200=3 \times 66 + 2$ より、 $67 \leq k \leq 100$ のとき、 k の倍数は 2 個

$200=4 \times 50$ より、 $51 \leq k \leq 66$ のとき、 k の倍数は 3 個

$200=5 \times 40$ より、 $41 \leq k \leq 50$ のとき、 k の倍数は 4 個

$200=6 \times 33 + 2$ より、 $34 \leq k \leq 40$ のとき、 k の倍数は 5 個

$200=7 \times 28 + 4$ より、 $29 \leq k \leq 33$ のとき、 k の倍数は 6 個

$200=8 \times 25$ より、 $26 \leq k \leq 28$ のとき、 k の倍数は 7 個

$200=9 \times 22 + 2$ より、 $23 \leq k \leq 25$ のとき、 k の倍数は 8 個

$200=10\times 20$ より, $21\leq k\leq 22$ のとき, k の倍数は 9 個

$200=11\times 18+2$ より, $19\leq k\leq 20$ のとき, k の倍数は 10 個

$200=12\times 16+8$ より, $17\leq k\leq 18$ のとき, k の倍数は 11 個

$200=13\times 15+5$ より, 16 の倍数は 12 個

$200=14\times 14+4$ より, 15 の倍数は 13 個

14 の倍数は 14 個, 13 の倍数は 15 個, 12 の倍数は 16 個, 11 の倍数は 18 個,

10 の倍数は 20 個, 9 の倍数は 22 個, 8 の倍数は 25 個, 7 の倍数は 28 個,

6 の倍数は 33 個, 5 の倍数は 40 個, 4 の倍数は 50 個, 3 の倍数は 66 個,

2 の倍数は 100 個, 1 の倍数は 200 個

よって, 倍数が奇数個であるのは,

$101\leq k\leq 200$, $51\leq k\leq 66$, $34\leq k\leq 40$, $26\leq k\leq 28$, $21\leq k\leq 22$, $17\leq k\leq 18$,

$k=15, 13, 8, 6$ の場合であるから, その個数は

$100+16+7+3+2+2+1+1+1+1=134$ (個) 従って, 点灯しているランプは 134 個。

[講評]

「カードの倍数のランプのスイッチを押す」を「数字 n の約数のランプのスイッチを押す」と読み間違えた答案があった。読解力が問われたかもしれない。

(1)①で「(3 番のランプは)消灯」と解答しているにもかかわらず, ②で点灯しているランプの番号に「3」を記入するなどの矛盾した答案があった。

(2)記号を工夫する, 合同式を利用するなどの意欲的な答案もあったが, 単に「約数が奇数個のときランプは点灯」のような答案が多かった。数字はランプとカード両方に書いてあり, どちらについて述べているのか区別しないといけないのだが, その意識はまだ薄いようである。